

Tema 1

Conjuntos

1. Generalidades

(1.1) Una *clase* es una colección A de objetos (llamados *elementos* de la clase) de manera que dado un objeto x , es posible determinar si x es un miembro (*pertenece*) o no de A . El hecho de que x sea un elemento de la clase A se expresa $x \in A$.

(1.2) Un *conjunto* es una clase A de manera que existe otra clase B tal que $A \in B$.

Si una clase A no es un conjunto (por ejemplo, la clase formada por todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos) entonces se dice que A es una clase propia.

(1.3) **Ejemplos.** Ejemplos de conjuntos son:

- el conjunto de los números naturales, que se suele denotar por \mathbb{N} , y que convendremos que contiene al número 0;
- el conjunto de los números enteros, que se suele denotar por \mathbb{Z} ;
- el conjunto \mathbb{Q} de los números racionales;
- el conjunto \mathbb{R} de los números reales;
- el conjunto \mathbb{C} de los números complejos;
- el conjunto de los números enteros primos;
- el conjunto de tres elementos $\{a, b, c\}$;
- el conjunto de las funciones primitivas de la función $\sin(x)$;
- el conjunto de los números enteros pares $\{x : x \in \mathbb{Z}, 2|x\}$;
- el conjunto de los polinomios mónicos con coeficientes racionales

$$\{p : p = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, n \in \mathbb{N} \text{ y } a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Q}\} .$$

Cuando los elementos de un conjunto A son todos los elementos que satisfacen una propiedad P , se suele escribir $A = \{x : x \text{ satisface } P\}$, tal y como se puede ver en algunos de los ejemplos anteriores.

(1.4) Se dice que un conjunto B es un *subconjunto* del conjunto A , y se denota $B \subseteq A$ si cada uno de los elementos de B también es un elemento de A . Si B no es un subconjunto de A , se denota $B \not\subseteq A$.

Por ejemplo, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Si $B \subseteq A$ y $C \subseteq B$, entonces $C \subseteq A$.

Si $B \subseteq A$ y $A \subseteq B$, entonces $B = A$ porque tienen exactamente los mismos elementos.

Si $B \subseteq A$ pero $A \neq B$, entonces también se puede denotar $B \subset A$, para indicar que se sabe que no son iguales.

(1.5) Se denomina conjunto *vacío* y se denota por \emptyset al conjunto que no tiene ningún elemento.

El conjunto vacío es un subconjunto de cualquier conjunto.

2. Operaciones con conjuntos

(2.1) Dados dos conjuntos A y B , se define

1. la *unión* de A y B , y se denota $A \cup B$, como el conjunto cuyos elementos son elementos de A o de B (o de ambos al mismo tiempo);
2. la *intersección* de A y B , y se denota $A \cap B$, como el conjunto cuyos elementos son al mismo tiempo elemento de A y de B ;
3. la *diferencia* de A menos B , y se denota $A - B$, al conjunto de elementos de A que no son elementos de B .

Más en general, si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos indexada por el conjunto de índices I , la unión de la familia es el conjunto

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists i \in I, x \in A_i\},$$

y la intersección de la familia es el conjunto

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i, \forall i \in I\}.$$

(2.2) Usando las definiciones anteriores, se puede comprobar que se verifican las siguientes propiedades:

(2.2.1) $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$.

(2.2.2) $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$. Como consecuencia, $A \cap B \subseteq A \cup B$.

(2.2.3) $A - B \subseteq A$, $(A - B) \cap B = \emptyset$.

(2.2.4) $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$.

(2.2.5) $((A \cup B) - (A - B)) - (B - A) = A \cap B$.

(2.2.6) $B \subseteq A$ si, y sólo si $A \cap B = B$.

(2.2.7) $B \subseteq A$ si, y sólo si $A \cup B = A$.

(2.2.8) $B \subseteq A$ si, y sólo si $B - A = \emptyset$.

(2.2.9) Si $\{B_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos indexada por I , entonces $A \cap (\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$ y $A \cup (\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$.

(2.3) Si A es un subconjunto del conjunto U , se denomina *complementario* de A en U , y se denota por \overline{A} , al conjunto $U - A$.

El complementario \overline{A} es también un subconjunto de U , y verifica que $A \cap \overline{A} = \emptyset$ y también que $A \cup \overline{A} = U$.

(2.4) **Leyes de De Morgan.** Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de subconjuntos del conjunto U , entonces

$$(2.4.1) \quad \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}.$$

$$(2.4.2) \quad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}.$$

(2.5) Mientras que $A \cap B = B \cap A$ y $A \cup B = B \cup A$, en general $A - B \neq B - A$. ¿Cuándo se cumple que $A - B = B - A$?

Se llama *diferencia simétrica* de los conjuntos A y B , y se denota por $A \Delta B$ al conjunto $(A - B) \cup (B - A)$.

Se verifica que $A \Delta B = B \Delta A$.

3. Partes de un conjunto

(3.1) Dado un conjunto A , se llama *partes de A* al conjunto formado por todos los subconjuntos de A . El conjunto de las partes de A se denota por $\mathcal{P}(A)$.

Dado que el conjunto vacío y el propio A son subconjuntos de A , tanto \emptyset como A son elementos de $\mathcal{P}(A)$.

Si A es un conjunto con n elementos, entonces el conjunto de las partes de A tiene 2^n elementos. Por eso al conjunto de las partes de A también se le suele denotar 2^A .

(3.2) **Ejemplos.** Sea $A = \{a, b\}$. El conjunto de las partes de A es

$$\mathcal{P}(A) = \{A, \{a\}, \{b\}, \emptyset\}.$$

El conjunto de las partes de \emptyset es $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. A su vez, el conjunto de las partes de $\mathcal{P}(\emptyset)$ es

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\{\emptyset\}, \emptyset\}.$$

4. Producto cartesiano

(4.1) Sean A y B dos conjuntos. Se llama *producto cartesiano* de A y B al conjunto formado por todas las posibles parejas de la forma (a, b) , donde $a \in A$ y $b \in B$. El conjunto producto cartesiano de A y B se denota por $A \times B$.

Más en general, si A_1, \dots, A_n son conjuntos (siendo $n \geq 2$), el producto cartesiano de A_1, \dots, A_n es el conjunto de n -uplas

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{x : x = (a_1, \dots, a_n) \text{ con } a_i \in A_i \quad \forall 1 \leq i \leq n\}.$$

(4.2) Ejemplo. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{\alpha, \beta\}$. El producto cartesiano de A y B es el conjunto

$$A \times B = \{(1, \alpha), (2, \alpha), (3, \alpha), (1, \beta), (2, \beta), (3, \beta)\}.$$

Si A_1, \dots, A_n (con $n \geq 2$) son conjuntos y al menos uno de ellos es vacío, entonces $A_1 \times \dots \times A_n = \emptyset$.

5. Aplicaciones

(5.1) Una *correspondencia* entre dos conjuntos A y B es toda regla que asocia elementos de A con elementos de B .

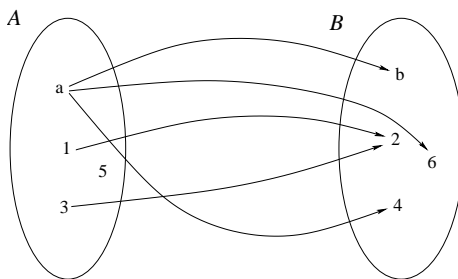


Figura 1.1: Una correspondencia entre A y B .

Toda correspondencia entre A y B se puede describir mediante un subconjunto C del producto cartesiano $A \times B$ de manera que el par (a, b) es un elemento de C si, y sólo si b está asociado a a . En la correspondencia de la figura 1.1,

$$C = \{(a, b), (a, 6), (a, 4), (1, 2), (3, 2)\}.$$

A partir de ese subconjunto C del producto cartesiano $A \times B$ se puede reconstruir la correspondencia, asociándole al elemento $a \in A$ el elemento $b \in B$ cuando el par (a, b) sea elemento de C .

(5.2) Sean A y B conjuntos. Una *aplicación* de A en B es una correspondencia entre A y B de manera que a cada elemento a de A se le asocia uno, y sólo un elemento b de B llamado *imagen* de a mediante la aplicación.

Dicho de otra manera, una correspondencia es una aplicación cuando en el subconjunto C de $A \times B$ que la describe,

(5.2.1) para todo $a \in A$ existe un $b \in B$ tal que $(a, b) \in C$,

(5.2.2) y si $(a, b), (a, b') \in C$, entonces $b = b'$.

Si f es una aplicación del conjunto A en el conjunto B , se denota $f : A \rightarrow B$. Al conjunto A se le llama *conjunto inicial* o *dominio*, y al conjunto B se le llama *conjunto final*, *rango* o *codominio* de f .

Dos aplicaciones f y g son iguales cuando sus dominios son iguales, sus codominios también son iguales y la imagen de todos los elementos del dominio mediante cada una de la aplicaciones es la misma.

En la notación se puede incluir la regla que define la aplicación: si, por ejemplo, f es la aplicación de \mathbb{Z} en \mathbb{N} que a cada número entero le asigna su cuadrado, se denota

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto x^2. \end{aligned}$$

(5.3) Ejemplos.

- La correspondencia entre \mathbb{R} y el propio \mathbb{R} que a cada número real x le asigna el número real $\cos x$ es una aplicación. Sin embargo, la que le asigna el número \sqrt{x} no lo es, porque por una parte x no tiene imagen cuando es negativo, y por otra parte x tiene dos imágenes cuando es positivo.
- Sean A_1, \dots, A_n conjuntos ($n \geq 2$) y fijemos un índice $i \in \{1, \dots, n\}$. La i -ésima proyección, que a cada n -upla $(a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \dots \times A_n$ le asigna la componente a_i , es una aplicación $\pi_i : A_1 \times \dots \times A_n \longrightarrow A_i$.
- La correspondencia que a cada par de números enteros (a, b) le asigna la suma $a + b$ es una aplicación del producto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ en \mathbb{Z} .
- Sea A un conjunto. La correspondencia que a cada elemento a de A le asigna el propio elemento a es una aplicación de A en A que se llama aplicación *identidad* y se denota $1_A : A \longrightarrow A$.
- Si S es un subconjunto de A , la correspondencia que a cada elemento s de S le asigna el elemento s de A , es una aplicación de S en A que se llama aplicación *inclusión*.
- Si $f : A \longrightarrow B$ es una aplicación y S es un subconjunto de A , la correspondencia que a cada s de S le asigna el elemento $f(s)$ de B es una aplicación de S en B que se denomina aplicación *restricción* de f a S , y se denota $f|_S$.

(5.4) Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ dos aplicaciones. La imagen de cada $a \in A$ por f es un elemento de B , y por lo tanto se puede considerar su imagen mediante g , $g(f(a))$. La correspondencia que a cada a de A le asigna la imagen mediante g de $f(a)$ es una aplicación de A en C que se denomina aplicación *composición* de f y g , y que se denota $g \circ f$.

Si $h : C \longrightarrow D$ es otra aplicación, se puede componer con $g \circ f : A \longrightarrow C$ para obtener la aplicación $h \circ (g \circ f) : A \longrightarrow D$. Por otra parte, se pueden componer en primer lugar g y h para obtener $h \circ g : B \longrightarrow D$ y luego con f para obtener $(h \circ g) \circ f : A \longrightarrow D$. Las aplicaciones $h \circ (g \circ f)$ y $(h \circ g) \circ f$ son iguales.

Si $f : A \longrightarrow B$ es una aplicación, entonces la composición de f con las aplicaciones identidad es igual a f :

$$f \circ 1_A = f \quad , \quad 1_B \circ f = f.$$

Dada una aplicación $f : A \longrightarrow B$, se llama conjunto *imagen* de f y se denota por $\text{Im } f$ al subconjunto de B formado por todos los elementos que son la imagen mediante f de algún elemento de A , o sea,

$$\text{Im } f = \{b : b \in B \text{ y } \exists a \in A, f(a) = b\}.$$

(5.5) Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación.

(5.5.1) Si elementos distintos a y a' de A tienen imágenes distintas $f(a)$ y $f(a')$, se dice que f es una aplicación *inyectiva*. Dicho de otra forma, f es inyectiva si, siempre que $f(a) = f(a')$, se tiene que $a = a'$.

(5.5.2) Si todos los elementos de B son imagen mediante f de algún elemento de A , se dice que f es una aplicación *sobreyectiva* o *suprayectiva*. Dicho de otra forma, f es sobreyectiva cuando $\text{Im}(f) = B$.

(5.5.3) Si f es al mismo tiempo inyectiva y sobreyectiva, se dice que f es una aplicación *biyectiva*, o también que es una biyección.

Estas tres nociones dependen, además de la regla que define a f , del dominio y codominio de f .

(5.6) Si $f : A \longrightarrow B$ es una aplicación biyectiva, se puede construir una aplicación de B en A , que se llama aplicación *inversa* de f , de la siguiente manera: cada elemento b de B es la imagen de algún elemento de A (por ser f sobreyectiva) y además lo es de uno sólo (por ser f inyectiva). A b se le asigna el único elemento de A del que es imagen mediante f .

La aplicación inversa de f se denota por f^{-1} y también es una aplicación biyectiva.

Además, f^{-1} verifica que

$$f^{-1} \circ f = 1_A \quad , \quad f \circ f^{-1} = 1_B.$$